Раздел 5
АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В СОВРЕМЕННОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 37.022:378:51
ББК 74.58+74.202

Акаев С.В., Гильмуллин М.Ф.
Елабужский институт КФУ, г. Елабуга,
seryiakaev@mail.ru , *gilt_edged@mail.ru*

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Аннотация. В статье описывается одна из форм сетевого взаимодействия вуза и школы по подготовке будущих учителей математики – конкурс «Студент + школьник» совместных научно-исследовательских проектов. В качестве примера приводится организация методико-математического исследования по геометрии треугольника в малой творческой группе.

Ключевые слова: сетевое взаимодействие вуза и школы, подготовка учителя математики, конкурс совместных научно-исследовательских проектов, студент и школьник, специальные свойства правильного треугольника, экстремальные свойства треугольника.

В качестве одной из форм конструирования сетевого взаимодействия вуза и школы по подготовке будущих учителей математики в Елабужском институте КФУ используется конкурс «Студент + школьник» совместных научно-исследовательских проектов в научной конференции студентов. Целью конференции является расширение сетевого взаимодействия вуза и школы как в математической и методической подготовке студентов – будущих учителей, так и в ориентации школьников к исследовательской деятельности по математике. Задачей конференции является также создание малых творческих групп по математическим и методико-математическим исследованиям, вовлечение учителей математики к руководству научно-исследовательскими работами.

Согласно регламенту конкурса, настоящее исследование выполнялась творческой группой, в которую входили студент ЕИ КФУ С.В. Акаев, ученица 7 класса МБОУ «СОШ №8» г. Елабуги Разживина Ульяна, под руководством М.Ф. Гильмуллина, доцента кафедры математики и прикладной информатики ЕИ КФУ и учителя математики И.В. Шурыгиной.

К исследованиям предъявляются следующие требования: работа выполняется и защищается обязательно совместно одним студентом и одним школьником 7-10 классов; руководство работой осуществляется совместно преподавателем студента и учителем школьника. Выбор темы осуществляется по согласованию руководителей и исполнителей. Организация и регулирование работ осуществляется, в основном, дистанционно.

Предметом исследования мы выбрали неизвестные, специфические свойства простейшей геометрической фигуры – правильного треугольника. Он является символом гармонии еще со времен школы Пифагора. Мир треугольников загадочен и интересен. Популярность треугольника определяется его триединством: это простота, красота и значимость. Такая работа привлекательна и доступна ученику 7 класса. Актуальность данного проекта определяется необходимостью повышения мотивации учащихся к изучению геометрии треугольника с помощью интересных, наглядных средств обучения. В задачи исследования входило выделение специальных, в том числе экстремальных, свойств правильного треугольника.

Учеником были исследованы следующие свойства треугольника и выполнены учебно-исследовательские действия:

– история развития знаний о треугольниках;

– египетский, пифагоров и геронов треугольники;

– анализ применения свойств правильного треугольника на практике и науке;

– демонстрация учащимся специфических свойств правильного треугольника на уроках геометрии;

– флексагоны, их изготовление, модели и свойства.

Флексагоны – плоские модели из полосок бумаги, способные складываться и сгибаться определённым образом, состоящие из правильных треугольников [7, с.35-37] (Рис. 1).

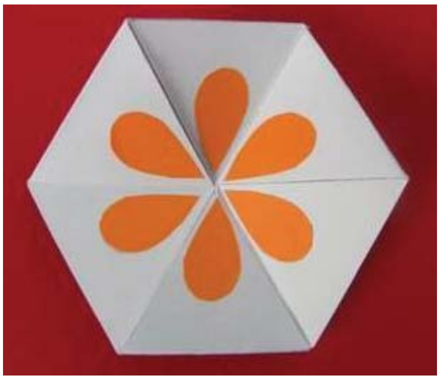

Рис. 1. Гексафлексагон.

С учащимися 6-7 классов были проведены занятия то темам «Правильные треугольники» и «Флексагоны» (Рис. 2-4). Школьники научились собирать один из моделей флексагона и пользоваться его свойствами.

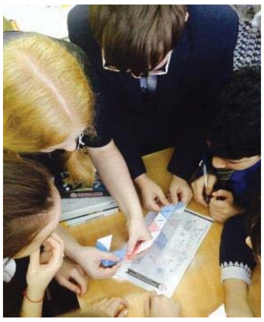

Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

Студентом были исследованы следующие вопросы геометрии треугольника:

– возвышенный (золотой) треугольник и его свойства;

– трисектрисы треугольника;

– специфические свойства правильного треугольника;

– правильные треугольники в задачах математических олимпиад;

– экстремальные свойства правильного треугольника.

Оказывается, равносторонний треугольник имеет много замечательных экстремальных свойств. Рассмотрим несколько таких задач, в них требуется определить, какое наибольшее или наименьшее значение может принимать какая-то величина. Для решения таких задач существует общий метод, основанный на применении производной. Однако, решение с помощью этого метода может быть не рациональной. В некоторых случаях проще применить элементарные методы. Например, геометрические экстремальные задачи тесно связаны с геометрическими неравенствами.

Рассмотрим две такие экстремальные задачи.

Задача 1. Среди всех треугольников, в которые вписан окружность данного радиуса r, найти треугольник наименьшей площади.

Решение. Окружность первоначально впишем в произвольный треугольник ABC (Рис. 5).

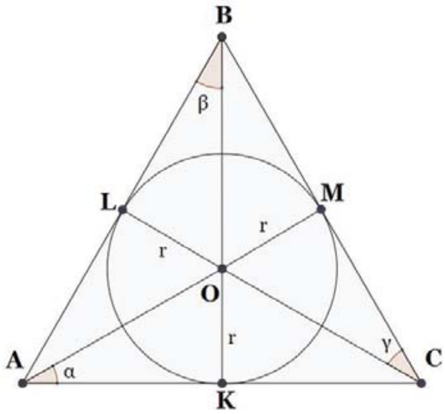

Рис. 5.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔCKO и ΔCMO. Так как KO и MO – это радиусы круга, то KO=MO, CO – общая сторона, а углы CKO и CMO равны 90^o, то ΔCKO=ΔCMO. Таким же способом доказываем, что ΔAKO=ΔALO, ΔBLO=ΔBMO.

Выразим стороны треугольника через радиус. Для этого нам понадобятся углы, которые обозначены на рис 5. Так как мы выше доказали равенство треугольников, то можно сказать, что и углы делятся пополам. Обозначим CM=x, BM=y, AK=z. Итак: x= r÷tg γ, y= r÷tg β, z= r÷tg α.

Выразим площадь треугольника через радиус и его углы, получим:

S=r^2 ×ctg α + r^2 ×ctg β + r^2 ×ctg γ.

Так как α+β+γ = $\frac{\pi}{2}$, то γ= $\frac{\pi}{2}$ – α – β.

Произведем замену: S=r^2 ×ctg α + r^2 ×ctg β + r^2 ×ctg $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$. (1)

Далее запишем формулу (1) в другой форме:

$f(\alpha,\beta)$=r^2 ×ctg α + r^2 ×ctg β + r^2 ×ctg $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$.

Найдем экстремумы этой функции:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{d\alpha} = \dfrac{-r^2}{\sin^2\alpha} + \dfrac{r^2}{\cos^2(\alpha+\beta)} = 0, \\ \dfrac{df}{d\beta} = \dfrac{-r^2}{\sin^2\beta} + \dfrac{r^2}{\cos^2(\alpha+\beta)} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$, а так как сумма углов равна $\frac{\pi}{2}$, получается: $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$, поэтому треугольник – равносторонний.

Ответ: среди всех треугольников, в которые вписан окружность данного радиуса r, равносторонний треугольник будет иметь наименьшую площадь [5, с.66.].

Следствие. $S = 3\sqrt{3}r^2$.

Задача 2. Среди всех треугольников, вокруг которых описан окружность данного радиуса R, найти треугольник наибольшей площади.

Решение. Решение задачи – аналогичное (Рис. 6).

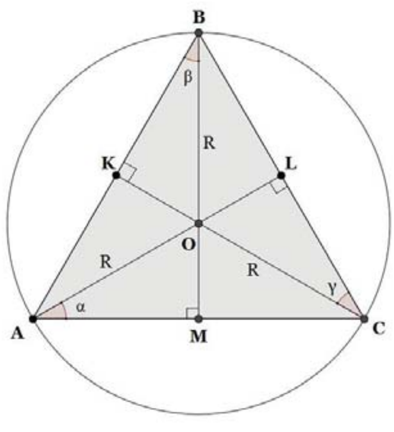

Рис. 6.

Рассмотрим треугольники ΔAMO и ΔCMO, MO – общая сторона AO = CO = R. Так как MO перпендикуляр к AC, то ΔAMO = ΔCMO. Таким же образом доказываем, что ΔCLO = ΔBLO и ΔBKO = ΔAKO.

Выразим AM и MO через угол OAM и радиус:

AM = R×cosα, MO = R×sinα.

Найдем площадь треугольника ΔAMO: $S_{AMO} = \frac{1}{2} \times R^2 \times \cos\alpha \times \sin\alpha$.

Теперь найдем площадь треугольника ΔABC.

S = $R^2 \times \cos\alpha \times \sin\alpha + R^2 \times \cos\beta \times \sin\beta + R^2 \times \cos\gamma \times \sin\gamma$. (2)

Так как $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$, то $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$.

$\cos\gamma \sin\gamma = \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)$

Далее запишем формулу (2) в другой форме:

$f(\alpha,\beta) = R^2 \times \sin 2\alpha + R^2 \times \sin 2\beta + R^2 \times \sin 2(\alpha+\beta)$.

Теперь, как и в первой задаче, найдем экстремумы:

$$\begin{cases} \frac{df}{d\alpha} = R^2 \cos 2\alpha + R^2 \cos 2(\alpha+\beta) = 0, \\ \frac{df}{d\beta} = R^2 \cos 2\beta + R^2 \cos 2(\alpha+\beta) = 0. \end{cases}$$

Решаем систему и получаем, что $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$, откуда получается:

$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$, поэтому треугольник – равносторонний.

Ответ: среди всех треугольников, вписанных в окружность данного радиуса R, равносторонний треугольник будет иметь наибольшую площадь [5, с.66.].

Следствие. $S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Материалы данного проекта могут быть использованы как дополнительные средства к урокам геометрии и для внеклассной работы по математике.

Библиографический список

1. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения. М.: Просвещение, 1996. 240 с.

2. Дышинский Е.А. Геометрия треугольника и окружности. Факультативный курс по математике для учащихся X-XI классов. Пермь, 1993. 106 с.

3. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией / Под ред. А.П. Савина. М.: Наука, 1978. 224 с.

4. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч. I. М.: Наука, 1986. 272 с.

5. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч. II. М.: Наука, 1986. 288 с.

6. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. М.: ООО «Издательство АСТ», 2001. 400 с.

7. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия: Учеб. пособие для V-VI кл. Смоленск: Русич, 1995. 208 с.